LOI NORMALE ET ESTIMATION

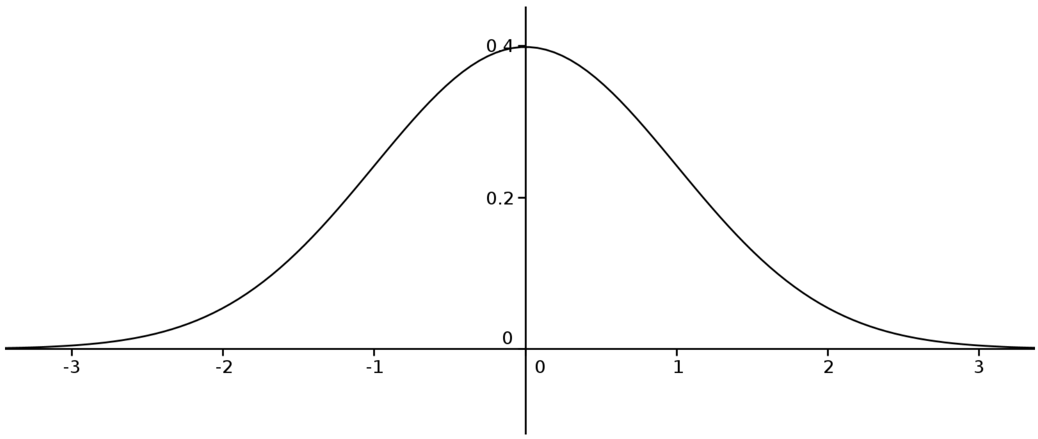
1. Théorème de Moivre-Laplace

Si X_n est une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n\,;p)$ et si on note Z_n la variable aléatoire $\dfrac{X_n-np}{\sqrt{n\,p(1-p)}}$ (On a donc $Z_n=\dfrac{X_n-E(X_n)}{\sigma(X_n)}$), alors pour tous réels a et b tels que $a\leq b$, $\lim\limits_{n\to+\infty} p(X_n\in[a\,;b])=\int_a^b \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

2. Loi normale centrée réduite

a. Définition

La loi normale centrée réduite est une loi de probabilités dont la densité est donnée par la fonction $x\to\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. On la note $N(0\,;1)$.



Remarque :La définition est justifiée par le fait que $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$.

b. Propriétés

Si une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite, alors l'espérance de X est $E(X)=0$ et la variance de X est $V(X)=E((X-E(X))^2)=1$.

c. Remarque

Dans la pratique, si X_n suit une loi binomiale $B(n\,;p)$, on considère que l'on peut remplacer la loi de $Z_n=\dfrac{X_n-E(X_n)}{\sigma(X_n)}$ par la loi normale centrée réduite si $n\geq 30$, $n\,p\geq 5$ et $n(1-p)\geq 5$.

3. Loi normale

a. Définition

On dit que la variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres μ et σ^2 (notée $N(\mu;\sigma^2)$) si la variable aléatoire $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

b. Propriétés

Si X suit une loi normale $N(\mu;\sigma^2)$, alors $E(X)=\mu$ et $V(X)=\sigma^2$.

c. Quelques valeurs

Si X suit la loi normale $N(\mu;\sigma^2)$ alors :

$p(X\in[\mu-\sigma;\mu+\sigma])\approx 0{,}683$

$p(X\in[\mu-2\sigma;\mu+2\sigma])\approx 0{,}954$

$p(X\in[\mu-3\sigma;\mu+3\sigma])\approx 0{,}997$

4. Échantillonnage

a. Théorème

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à $]0;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $p(-u_\alpha\leq X\leq u_\alpha)=1-\alpha$.

On a notamment les valeurs usuelles $u_{0,05}\approx 1{,}96$ et $u_{0,01}\approx 2{,}58$.

b. Intervalle de fluctuation asymptotique

Si X_n suit une loi binomiale $B(n;p)$ alors, si on note $F_n=\frac{X_n}{n}$ la fréquence du succès, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} p\left(p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\leq F_n\leq p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$.

Dans la pratique, pour $\alpha=0{,}05$ et si $n\geq 30$, $np\geq 5$ et $n(1-p)\geq 5$, l'intervalle $I=\left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ est appelé intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de F_n . On a : $p(F_n\in I)\approx 0{,}95$.

Remarque : L'intervalle $J=\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est une assez bonne approximation de cet intervalle. (plus précisément, $I\subset J$ donc $p(F_n\in J)>0{,}95$)

5. Estimation

a. Situation

Si X_n suit une loi binomiale de $B(n;p)$, n étant connu, il s'agit de déterminer un intervalle contenant les valeurs « probables » de p à partir d'une valeur observée x de X_n .

b. Intervalle de confiance

Si $X_{n,p}$ suit une loi binomiale $B(n\,;p)$, on note $F_{n,p} = \frac{X_{n,p}}{n}$ la fréquence du succès et $f = \frac{x}{n}$ une fréquence observée.

On dit que I est un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ ($\alpha \in]0\,;1[$) si pour tout $p \in I$, $p(f \in J_p) \geq 1-\alpha$, où J_p est l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil $1-\alpha$ de $F_{n,p}$.

c. Intervalle de confiance à 95 %

Si $n \geq 30$, $nf \geq 5$ et $n(1-f) \geq 5$, alors $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance au niveau de 95 % de p.